DM3 vA

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. ***a)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) = 3 \ \Leftrightarrow\ \lambda \notin \{0, -1, 1\}$$

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\ E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \end{array}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux. En déduire leurs dimensions.

2. ***a)*** Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer : $A = PDP^{-1}$.

3. Calculer la matrice $C = P^{-1}\, B\, P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.

2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est définie en **I.2**.

a) Montrer : $M \in \ker(f) \ \Leftrightarrow\ DN = NC$.

b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.

c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

4. ***a)*** En déduire la dimension de $\ker(f)$.

b) Donner au moins un élément non nul de $\ker(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.