DM2

(Oraux HEC)

Exercice avec préparation 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

1. a) Question de cours
Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Démonstration.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \big(|x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$$

□

b) Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car pour tout $x \in]0, +\infty[$: $e^x - 1 \neq 0$).
- Montrons que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
  - Tout d'abord : $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
  - Ainsi : $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = x$.
  - Or : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge donc de manière unique en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+, \text{ nulle en } 0.}$$

□

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-nt}\, dt \ = \ \frac{2}{n^3}$.

Démonstration.

- <u>Méthode 1</u> : Effectuer des intégrations par parties.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \geqslant 0$.
  - On procède par intégration par parties (IPP) suivante :

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^2 & \quad & u'(t) & = & 2\,t \\[2mm] v'(t) & = & e^{-nt} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{n}\, e^{-nt} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= \left[-\frac{1}{n}\, t^2 \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A - \int_0^A 2t \times \left(-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\right) dt \\
&= -\frac{1}{n} \left[t^2 \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left(A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} - 0 \right) + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt
\end{aligned}$$

- On procède une nouvelle IPP pour calculer $\displaystyle\int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt$:

$$\left| \begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
u(t) &=& t & u'(t) &=& 1 \\
v'(t) &=& \mathrm{e}^{-nt} & v(t) &=& -\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}
\end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= \left[-\frac{1}{n}\, t \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left[t \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A \mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left(A \,\mathrm{e}^{-nA} - 0 \right) + \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2} \left[\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2} \left(\mathrm{e}^{-nA} - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2} \right) \\
&= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^2}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^3}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n^3}
\end{aligned}$$

Or :

× tout d'abord : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A^2}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$

et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A \,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$, par croissances comparées,

× de plus : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-nA} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt = \frac{2}{n^3}.}$$

- Méthode 2 : Utiliser une v.a.r. à densité.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Rappelons tout d'abord que la fonction $g : t \mapsto \begin{cases} n\,\mathrm{e}^{-nt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est une densité d'une v.a.r. X qui suit la loi $\mathcal{E}(n)$.
    Or pour tout $t \in [0, +\infty[$:
    $$t^2\,\mathrm{e}^{-nt} \ = \ \frac{1}{n}\left(t^2 \times n\,\mathrm{e}^{-nt}\right)$$
  - Cette v.a.r. X admet un moment d'ordre 2. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,g(t)\,dt$ converge.
    De plus, la fonction g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi :
    $$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \int_0^{+\infty} t^2\,g(t)\,dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^2 \times n\mathrm{e}^{-nt}\,dt$$
  - Par ailleurs, d'après la formule de Kœnig-Huyghens :
    $$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{2}{n^2}$$
  - On en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \times n\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ = \ \frac{2}{n^2}$.

$$\boxed{\text{Finalement l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^3}.}$$

Commentaire

- Remarquons, dans cette question, que :
  × la première méthode utilisant les intégrations par parties successives est certes générale mais source de nombreuses erreurs de calculs et très chronophage,
  × la seconde méthode utilisant les v.a.r. à densité est plus subtile et demande plus d'initiative (l'introduction de la v.a.r. X). Mais cet effort s'avère payant puisque la résolution de la question est alors rapide, élégant et le risque d'erreurs de calcul faible.

  Il fallait donc ici privilégier la seconde méthode (ce qui n'empêche pas de savoir parfaitement réaliser une IPP !)
- De manière générale, pour le calcul d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt$, avec $\lambda > 0$, on pensera toujours à faire aparaître les moments d'ordre 1 et 2 d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (notamment lors des oraux HEC où la rapidité et l'efficacité dans la résolution des exercices jouent un rôle important).

□

3. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t$.

Démonstration.
- Soit $t > 0$.
$$\begin{aligned} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t \ &\Leftrightarrow \ \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant 1 && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 && \textit{(car, comme } t > 0,\ \mathrm{e}^t - 1 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ t + 1 \leqslant \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

- La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes. En particulier, elle se situe au-dessus de sa tangente en 0.
  L'équation de cette tangente est :
  $$y \;=\; h'(0)(x-0)+h(0) = x+1$$
  Ainsi : $\forall t > 0$, $t+1 \leqslant \mathrm{e}^t$.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t > 0,\ \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t.}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre l'inégalité $t+1 \leqslant \mathrm{e}^t$ en étudiant la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$.

□

b) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t > 0$.
  $$f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \;=\; \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{e}^{-nt} \;\leqslant\; t\,\mathrm{e}^{-nt} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$
- On rappelle : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$. Donc la v.a.r. X admet une espérance.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times n\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge également.
- On obtient :
  × $\forall t > 0$, $0 \;\leqslant\; f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \;\leqslant\; t\,\mathrm{e}^{-nt}$
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge.

  Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \text{ converge.}}$$

Commentaire

- L'énoncé demande simplement de montrer la **convergence** de l'intégrale (et non son calcul). Il faut donc privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
- Il a déjà été constaté en question précédente que l'utilisation d'une v.a.r. exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, plutôt qu'une IPP, pour montrer la convergence (puis calculer) des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ est bien plus appropriée. Seule cette méthode est donc exposée dans cette question.

□

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t > 0$. D'après la question ***3.a)*** :
$$0 \ \leqslant\ f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \ \leqslant\ t\,\mathrm{e}^{-nt}$$
De plus les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ convergent.
Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant +\infty$) :
$$0 \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$$

Commentaire

L'hypothèse de convergence des intégrales est indispensable pour utiliser la croissance de l'intégrale.

- Or :
$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ =\ \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t\times n\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ =\ \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X) \ =\ \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} \ =\ \frac{1}{n^2}$$
- On obtient alors :
$$0 \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ \leqslant\ \frac{1}{n^2}$$
De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0.}$$ □

4. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

Démonstration.
Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}
t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} &= t^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= t^2 \times \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \qquad \textit{(car, comme } t>0 \textit{ : } e^{-t} \neq 1\textit{)} \\
&= t^2 \times \frac{1}{\mathrm{e}^t}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= t^2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}^t - 1} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= f(t)\,\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right) + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= f(t)\left(1 - \cancel{\mathrm{e}^{-nt}} + \cancel{\mathrm{e}^{-nt}}\right) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}$$ □

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Démonstration.

- Soit $A > 0$. D'après la question précédente :

$$\forall t > 0,\ f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$$

  Par continuité des fonctions en présence sur $[0, A]$:

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\ dt &= \int_0^A \left(t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\right)\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt + \int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

- D'après la question ***3.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ converge, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question ***2.***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt$ converge, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$, et :

$$\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-kt}\ dt = \frac{2}{k^3}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} f(t)\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ en tant que somme d'intégrales convergentes, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

- De plus :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\ dt &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nt}\ dt \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \end{aligned}$$

- Enfin :
  - × d'après la question ***3.c)*** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt = 0$.
  - × la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant 3 $(3 > 1)$.

Finalement :

$$\begin{array}{ccc}
\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt & & \lim\limits_{n\to+\infty} 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \ = \ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} + 0
\end{array}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}}$$

□

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$. Soit $t \in [k, k+1]$.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Comme} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\
\text{alors} & \dfrac{1}{k^3} & \geqslant & \dfrac{1}{t^3} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^3}
\end{array}$$

(par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sur $]0, +\infty[$)

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue sur le segment $[k, k+1]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\ dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3}\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^3}\ dt \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
(k+1-k)\,\dfrac{1}{(k+1)^3} & & & & (k+1-k)\,\dfrac{1}{k^3}
\end{array}$$

- Soit $N \geqslant n$. On obtient, par sommation des inégalités de gauche pour k variant de n à N :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\ dt \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} & & \displaystyle\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\ dt
\end{array}$$

(par relation de Chasles)

Or :

× tout d'abord, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} \right)_{N \geqslant n}$ également. Ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

× ensuite :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\, dt \ = \ \left[-\frac{1}{2\,t^2} \right]_n^{N+1} \ = \ -\frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{2\,n^2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\,n^2}$$

On en déduit : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \ \leqslant \ \frac{1}{2\,n^2}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ \leqslant \ \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\,n^2} \ = \ \frac{1}{n^2}.}$$

□

b) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction `approx` affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, avec une précision `epsilon` entrée en argument.

```
1  function I = approx(epsilon)
2      I = 0;
3      n = ??? ;
4      for i = 1:n
5          I = I + ??? ;
6      end ;
7      disp(I, 'integrale = ') ;
8  endfunction
```

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3}$.

  D'après la question ***4.b)***, la suite (S_n) converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ I$$

  Donc, à partir d'un certain rang, les valeurs de S_n sont aussi proches que souhaité de I. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n - I| < \varepsilon$$

  Pour obtenir une approximation de I, il suffit donc de calculer S_n pour n suffisamment grand.

- Il reste à mesurer l'erreur faite lorsque l'on approche I par S_n. Pour cela, il faut considérer $I - S_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***4.b)*** :

$$I \ = \ \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$

  Donc :

$$I - S_n \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$

Il reste à savoir comment choisir n pour une précision ε donnée. Pour cela, on utilise la question ***5.a)*** comme suit :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

- L'inégalité de gauche est vérifiée car $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{2}{k^3}$ est une somme de termes positifs.
- L'inégalité de droite est vérifiée d'après la question ***5.a)***.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I - S_n \leqslant \frac{1}{n^2}.}$$

Commentaire

- On a rappelé plus haut la définition de la convergence pour la suite (S_n).
  On note que cette définition, si elle affirme l'existence d'un entier n_0 tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de I à ε près, ne dit rien sur la valeur de ce n_0. On parle d'une définition **existentielle** (l'objet existe), mais pas **constructive** (on ne sait pas comment obtenir la valeur de l'objet).
- Il est relativement classique en mathématiques d'utiliser des théorèmes fournissant l'existence d'un objet sans en donnant la valeur. C'est par exemple le cas lors de l'étude d'équation du type $f(x) = 0$.
  - Soit l'équation est simple et on trouve directement les solutions de manière constructive. Une autre méthode constructive, la dichotomie, permet de déterminer une valeur approchée des solutions d'une telle équation.
  - Soit elle est plus complexe à résoudre et on démontre que la fonction f réalise une bijection d'un intervalle J sur $f(J)$.
    Dans ce cas, x apparaît comme l'antécédent de 0 par la fonction f. On sait qu'un tel x existe mais on ne connaît pas sa valeur.

- On cherche alors ici à trouver un entier n_0 tel que S_{n_0} est une valeur approchée de I à ε près.
  Autrement dit, on souhaite exhiber n_0 tel que :
  $$0 \leqslant I - S_{n_0} \leqslant \varepsilon$$
- Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver n_0 tel que : $\dfrac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon$.
  En effet, d'après ce qui précède, on aura alors, par transitivité :
  $$0 \leqslant I - S_{n_0} \leqslant \frac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon$$
- Or on a :
  $$\begin{aligned} \frac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad n_0^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad n_0 \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} && \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$
  On choisit alors : $n_0 = \left\lceil \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$.

- Il suffit donc de calculer S_{n_0} avec $n_0 = \left\lceil \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$.

```
n = ceil(1 / sqrt(epsilon)) ;
```

```
I = I + 2 / (i ^ 3) ;
```

Commentaire

- On remarquera que la présence des « ; » n'est pas nécessaire ici. En effet, ce symbole annule l'affichage des résultats des instructions qui le précèdent. Or, dans une structure du type `function`, aucun résultat, hors la valeur finale de la variable de sortie (ici `I`) n'est visible à l'écran.
- On peut s'interroger sur la présence de la commande `disp(I, ' integrale = ')` dans cette fonction. En effet, cette commande permet l'affichage du résultat stocké dans la variable `I` (précédé du texte « `integrale = ` »). Or l'affichage de cette valeur s'effectue automatiquement lors d'un appel à la fonction `approx`.
  On rappelle également que l'avantage de la structure `function` est que le calcul effectué par la fonction `approx` peut facilement être utilisé ailleurs (notamment dans une autre fonction) : il suffit pour ce faire d'écrire l'appel `approx(epsilon)` (avec `epsilon` choisi correctement). On ne souhaite donc pas, la plupart du temps, afficher le résultat d'une fonction, mais le stocker dans une nouvelle variable.
- Enfin, le choix du nom `I` pour la variable de sortie pouvait être un peu perturbant puisqu'il était ici question de coder la somme S_n, valeur approchée de l'intégrale I (et non I directement). Il aurait sans doute été plus judicieux, par exemple, de choisir la lettre `S`. □

Exercice sans préparation 1
Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([\lfloor n\,U \rfloor = \lfloor n\,V \rfloor])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons la loi de la v.a.r. $X = \lfloor n\,U \rfloor$ et notons $f : x \mapsto \lfloor n\,x \rfloor$ de sorte que $X = f(U)$.
  - × Commençons par déterminer $X(\Omega)$.

$$X(\Omega) \ = \ (f(U))(\Omega) \ = \ f(U(\Omega)) \ \subset \ [\![0,n]\!]$$

En effet $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, donc : $U(\Omega) = [0,1]$. Et $f([0,1]) \subset [\![0,n]\!]$.
Détaillons ce dernier point. Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{ll} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{donc} & 0 \leqslant n\,x \leqslant n \\ \text{d'où} & 0 \leqslant \lfloor n\,x \rfloor \leqslant n \ \ \texttt{ET} \ \ \lfloor n\,x \rfloor \in \mathbb{N} \\ \text{ainsi} & \lfloor n\,x \rfloor \in [\![0,n]\!] \\ \text{c'est-à-dire} & f(x) \in [\![0,n]\!] \end{array}$$

  - × Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X=k]) & = & \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = k]) \ = \ \mathbb{P}([k \leqslant nU < k+1]) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{k}{n} \leqslant U < \dfrac{k+1}{n}\right]\right) \\ & = & F_U\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - F_U\left(\dfrac{k}{n}\right) \end{array}$$

Deux cas se présentent :

- si $k \in [\![0,n-1]\!]$.
  Alors, comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $\left(\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right) \in [0,1]^2$:

$$F_U\left(\frac{k+1}{n}\right) - F_U\left(\frac{k}{n}\right) \ = \ \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \ = \ \frac{1}{n}$$

- si $k = n$.
  Alors, comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $\dfrac{n}{n} \in [0,1]$ et $\dfrac{n+1}{n} > 1$:

$$F_U\left(\frac{n+1}{n}\right) - F_U\left(\frac{n}{n}\right) \ = \ \cancel{1} - \cancel{1} \ = \ 0$$

- De même, en notant $Y = \lfloor nV \rfloor$:
  - × $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$
  - × $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = n \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

- La famille $\big([X=k]\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) &= \mathbb{P}([X=Y]) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=Y] \cap [X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Y=k] \cap [X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Y=k]) \times \mathbb{P}([X=k]) && \textit{(car } \lfloor nU \rfloor \textit{ et } \lfloor nV \rfloor \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y=k]) \times \mathbb{P}([X=k]) && \textit{(car } \mathbb{P}([X=n]) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) = \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([U=V])$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons : $[U=V] \subset [\lfloor nU \rfloor = \lfloor vU \rfloor]$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Supposons $\omega \in [U=V]$, autrement dit : $U(\omega) = V(\omega)$.
  Donc : $nU(\omega) = nV(\omega)$. D'où : $\lfloor nU(\omega) \rfloor = \lfloor nV(\omega) \rfloor$, autrement dit : $\omega \in [\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ [U=V] \subset [\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor].}$$

- On en déduit, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}([U=V]) \leqslant \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) = \frac{1}{n}$$

  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on obtient : } \mathbb{P}([U=V]) = 0.}$$

□

2. Soit A la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$.

Commentaire

On prêtera attention à la nature des objets : la matrice aléatoire A est constituée de quatre coefficients qui sont **tous** des variables aléatoires.

- Pour les coefficients U et V, il est clair que ce sont bien des v.a.r. .
- La notation « 1 » pourrait laisser penser (mais un instant seulement !) qu'il s'agit d'un réel. Cependant les coefficients de A sont bien tous de même nature. Ainsi « 1 » est ici la variable aléatoire constante égale à 1.
  De même, « 0 » est la variable aléatoire constante égale à 0.

a) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

Démonstration.
Considérons l'événement $E = \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ inversible}\}$.

- \- Méthode 1 : Caractérisation de l'inversibilité pour des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Elle est donc inversible si et seulement si $\det(A(\omega)) \neq 0_{\mathbb{R}}$. Or :

  $$\det(A(\omega)) \;=\; U(\omega) \times V(\omega) - 0 \times 1 \;=\; U(\omega) \times V(\omega)$$

  Donc :

  $$\det(A(\omega)) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; U(\omega) \times V(\omega) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; U(\omega) \neq 0 \texttt{ ET } V(\omega) \neq 0$$

  Autrement dit, $A(\omega)$ est inversible si et seulement si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$,ou encore $\omega \in E$ si et seulement si $\omega \in [U \neq 0] \cap [V \neq 0]$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } E = [U \neq 0] \cap [V \neq 0].}$$

  \- Méthode 2 : Caractérisation de l'inversibilité pour des matrices triangulaires.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est triangulaire. Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls, c'est-à-dire si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$.
  Autrement dit, $A(\omega)$ est inversible si et seulement si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$, ou encore $\omega \in E$ si et seulement si $\omega \in [U \neq 0] \cap [V \neq 0]$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } E = [U \neq 0] \cap [V \neq 0].}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([U \neq 0] \cap [V \neq 0]) & = & \mathbb{P}([U \neq 0]) \times \mathbb{P}([V \neq 0]) & \textit{(car les v.a.r. } U \textit{ et } V \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \Big(1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[U \neq 0]}\Big)\Big) \times \Big(1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[V \neq 0]}\Big)\Big) & \\
& = & (1 - \mathbb{P}([U = 0])) \times (1 - \mathbb{P}([V = 0])) & \\
& = & (1 - 0) \times (1 - 0) & \textit{(car } U \textit{ et } V \textit{ sont des v.a.r. à densité)} \\
& = & 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la probabilité que la matrice aléatoire } A \text{ soit inversible est 1.}}$$

Commentaire

- On dit que la matrice aléatoire A est inversible presque sûrement.
- Ce type de question est assez difficile. L'idée est de manipuler un nouvel objet qui n'est pas au programme officiel. Il faut s'attendre aux oraux HEC à trouver des objets qui sont à la limite (ou un peu hors) du programme.
  Ici, ce nouvel objet est la **matrice aléatoire** A. Il faut concevoir que l'énoncé « A est diagonalisable » est un événement qui porte sur plusieurs v.a.r. . Une fois que l'on réussit à se ramener à l'événement $[U \neq 0] \cap [V \neq 0]$, alors la question redevient classique.

□

b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Démonstration.
Considérons l'événement $F = \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ diagonalisable}\}$.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux $U(\omega)$ et $V(\omega)$. Deux cas se présentent.
  - Si $U(\omega) \neq V(\omega)$, alors la matrice $A(\omega)$:
    × est d'ordre 2,
    × admet deux valeurs propres **distinctes**.

    Donc elle est diagonalisable.
  - Si $U(\omega) = V(\omega)$, montrons par l'absurde que $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable.
    Supposons que $A(\omega)$ est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A(\omega)$ telles que : $A(\omega) = PDP^{-1}$.
    Or $U(\omega)$ est la seule valeur propre de $A(\omega)$. Ainsi $D = U(\omega) \cdot I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et :
    $$A(\omega) \ = \ PDP^{-1} \ = \ P \times (U(\omega) \cdot I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}) \times P^{-1} \ = \ U(\omega) \cdot P\,P^{-1} \ = \ U(\omega)\, I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$
    Absurde !
    On en déduit que $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable.

  Finalement, la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable si et seulement si $U(\omega) \neq V(\omega)$, c'est-à-dire $\omega \in F$ si et seulement si $\omega \in [U \neq V]$.

  $\boxed{\text{On en conclut : } F = [U \neq V].}$

- Or, d'après la question ***1.b)*** :
  $$\mathbb{P}([U \neq V]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[U = V]}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}([U = V]) \ = \ 1 - 0 \ = \ 1$$

  $\boxed{\text{Ainsi la probabilité que la matrice aléatoire } A \text{ soit diagonalisable est 1.}}$

Commentaire

On dit que la matrice aléatoire A est diagonalisable presque sûrement.

□