DM2

(Oraux HEC)

Exercice avec préparation 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. a) Question de cours
Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Démonstration.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \big(|x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$$

$\square$

b) Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$: $\mathrm{e}^x - 1 \neq 0$).
- Montrons que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
  - Tout d'abord : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
  - Ainsi : $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = x$.
  - Or : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge donc de manière unique en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+, \text{ nulle en } 0.}$$

$\square$

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt \ = \ \frac{2}{n^3}$.
Indication : on pourra introduire considérer le moment d'ordre 2 d'une v.a.r. X suivant une loi exponentielle de paramètre à préciser.

Démonstration.

- Méthode 1 : Effectuer des intégrations par parties.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \geqslant 0$.
  - On procède par intégration par parties (IPP) suivante :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^2 & & u'(t) & = & 2\,t \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-nt} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt &= \left[\,-\frac{1}{n}\,t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A - \int_0^A 2t \times \left(-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\right)\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\,\left[\,t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A + \frac{2}{n}\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\,\big(A^2\,\mathrm{e}^{-nA} - 0\big) + \frac{2}{n}\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\,A^2\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n}\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt
\end{aligned}$$

- On procède une nouvelle IPP pour calculer $\displaystyle\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$:

$$\left|\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
u(t) & = & t & u'(t) & = & 1 \\
v'(t) & = & \mathrm{e}^{-nt} & v(t) & = & -\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}
\end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt &= \left[\,-\frac{1}{n}\,t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\,\left[\,t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A + \frac{1}{n}\int_0^A \mathrm{e}^{-nt}\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\,\big(A\,\mathrm{e}^{-nA} - 0\big) + \frac{1}{n}\left[\,-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\,A\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\left[\,\mathrm{e}^{-nt}\,\right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\,A\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\big(\mathrm{e}^{-nA} - 1\big) \\
&= -\frac{1}{n}\,A\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt &= -\frac{1}{n}\,A^2\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}\,A\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n}\,A^2\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^2}\,A\,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^3}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n^3}
\end{aligned}$$

Or :

- × tout d'abord : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^2\,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A^2}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$

  et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A\,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$, par croissances comparées,
- × de plus : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-nA} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = \frac{2}{n^3}.}$$

- Méthode 2 : Utiliser une v.a.r. à densité.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Rappelons tout d'abord que la fonction $g : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} n\,\mathrm{e}^{-nt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right.$ est une densité d'une v.a.r. X qui suit la loi $\mathcal{E}(n)$.
  Or pour tout $t \in [0, +\infty[$:
  $$t^2\,\mathrm{e}^{-nt} \ = \ \frac{1}{n}\left(t^2 \times n\,\mathrm{e}^{-nt}\right)$$
  - Cette v.a.r. X admet un moment d'ordre 2. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,g(t)\,dt$ converge.
  De plus, la fonction g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi :
  $$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \int_0^{+\infty} t^2\,g(t)\,dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^2 \times n\mathrm{e}^{-nt}\,dt$$
  - Par ailleurs, d'après la formule de Kœnig-Huyghens :
  $$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{2}{n^2}$$
  - On en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \times n\mathrm{e}^{-nt}\,dt \ = \ \frac{2}{n^2}$.

$$\boxed{\text{Finalement l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^3}.}$$

Commentaire

- Remarquons, dans cette question, que :
  - × la première méthode utilisant les intégrations par parties successives est certes générale mais source de nombreuses erreurs de calculs et très chronophage,
  - × la seconde méthode utilisant les v.a.r. à densité est plus subtile et demande plus d'initiative (l'introduction de la v.a.r. X). Mais cet effort s'avère payant puisque la résolution de la question est alors rapide, élégant et le risque d'erreurs de calcul faible.

  Il fallait donc ici privilégier la seconde méthode (ce qui n'empêche pas de savoir parfaitement réaliser une IPP !)
- De manière générale, pour le calcul d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,dt$, avec $\lambda > 0$, on pensera toujours à faire aparaître les moments d'ordre 1 et 2 d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (notamment lors des oraux HEC où la rapidité et l'efficacité dans la résolution des exercices jouent un rôle important).

☐

3. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t$.

Démonstration.

- Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t-1} \leqslant t & \Leftrightarrow & \dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1} \leqslant 1 & \textit{(car } t > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 & \textit{(car, comme } t > 0,\ \mathrm{e}^t - 1 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & t + 1 \leqslant \mathrm{e}^t & \end{array}$$

- La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes. En particulier, elle se situe au-dessus de sa tangente en 0.
  L'équation de cette tangente est :
  $$y \;=\; h'(0)(x-0)+h(0) = x+1$$
  Ainsi : $\forall t > 0,\ t+1 \leqslant \mathrm{e}^t$.
  $$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t > 0,\ \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t.}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre l'inégalité $t+1 \leqslant \mathrm{e}^t$ en étudiant la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$.

☐

b) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ est convergente.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t > 0$. D'après la question ***3.a)*** :
  $$0 \;\leqslant\; f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \;\leqslant\; t\,\mathrm{e}^{-nt}$$
  De plus les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ convergent.
  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant +\infty)$:
  $$0 \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$$
- Détaillons l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$.
  On rappelle : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$. Donc la v.a.r. X admet une espérance.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times n\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge également.

Commentaire

L'hypothèse de convergence des intégrales est indispensable pour utiliser la croissance de l'intégrale.

- Or :
  $$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;=\; \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t \times n\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{n^2}$$
- On obtient alors :
  $$0 \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;\leqslant\; \frac{1}{n^2}$$
  De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
  $$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0.}$$

Commentaire

Il a déjà été constaté en question précédente que l'utilisation d'une v.a.r. exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, plutôt qu'une IPP, pour montrer la convergence (puis calculer) des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ est bien plus appropriée. Seule cette méthode est donc exposée dans cette question.

☐

4. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

Démonstration.
Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} &= t^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t^2 \times \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \qquad \textit{(car, comme } t>0 \textit{ : } e^{-t} \neq 1\textit{)} \\ &= t^2 \times \frac{1}{\mathrm{e}^t}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t^2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}^t - 1} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\ &= f(t)\,\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right) + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\ &= f(t)\,\left(1-\cancel{\mathrm{e}^{-nt}} + \cancel{\mathrm{e}^{-nt}}\right) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}$$

☐

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Démonstration.

- Soit $A > 0$. D'après la question précédente :

$$\forall t > 0,\ f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$$

  Par continuité des fonctions en présence sur $[0, A]$:

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\,dt &= \int_0^A \left(t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\right)\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt + \int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

- D'après la question ***3.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question ***2.***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt$ converge, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} t^2\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt$ admet une limite finie en $+\infty$, et :

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-kt}\, dt \ = \ \frac{2}{k^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_0^{A} f(t)\, dt \text{ admet une limite finie en } +\infty \\ \text{en tant que somme d'intégrales convergentes, donc } \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge.}\end{array}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)\, dt &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt\end{aligned}$$

- Enfin :
  - × d'après la question ***3.c)*** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt = 0$.
  - × la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant 3 ($3 > 1$).

  Finalement :

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt & & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt \ = \ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} + 0\end{array}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}}$$

☐

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Indication : on pourra songer à effectuer une comparaison série-intégrale (ou méthode des rectangles) avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$. Soit $t \in [k, k+1]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\ \text{alors} & \dfrac{1}{k^3} & \geqslant & \dfrac{1}{t^3} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^3} \end{array}$$

(par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ *sur* $]0, +\infty[$*)*

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue sur le segment $[k, k+1]$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt$ est bien définie.

  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^3}\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ (k+1-k)\,\dfrac{1}{(k+1)^3} & & & & (k+1-k)\,\dfrac{1}{k^3} \end{array}$$

- Soit $N \geqslant n$. On obtient, par sommation des inégalités de gauche pour k variant de n à N :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} & & \displaystyle\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\, dt \quad \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

  Or :

  × tout d'abord, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3}\right)_{N\geqslant n}$ également. Ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

  × ensuite :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\, dt = \left[-\frac{1}{2\,t^2} \right]_n^{N+1} = -\frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{2\,n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\,n^2}$$

  On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2\,n^2}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\,n^2} = \frac{1}{n^2}.}$$

$\square$

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} \right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***4.b)*** :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} = S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$

  Donc :

$$I - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$

- De plus :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

  - L'inégalité de gauche est vérifiée car $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$ est une somme de termes positifs.
  - L'inégalité de droite est vérifiée d'après la question ***5.a)***.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I - S_n \leqslant \frac{1}{n^2}.}$$

□

c) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction `approx` affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, avec une précision `epsilon` entrée en argument.

```
1  function I = approx(epsilon)
2      I = 0;
3      n = ??? ;
4      for i = 1:n
5          I = I + ??? ;
6      end ;
7      disp(I, 'integrale = ') ;
8  endfunction
```

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier n_0 tel que S_{n_0} est une valeur approchée de I à ε près.
  Autrement dit, on souhaite exhiber n_0 tel que :

$$0 \leqslant I - S_{n_0} \leqslant \varepsilon$$

- Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver n_0 tel que : $\dfrac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon$.
  En effet, d'après ce qui précède, on aura alors, par transitivité :

$$0 \leqslant I - S_{n_0} \leqslant \frac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon$$

- Or on a :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{n_0^2} \leqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & n_0^2 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n_0 \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

  On choisit alors : $n_0 = \left\lceil \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$.

- Il suffit donc de calculer S_{n_0} avec $n_0 = \left\lceil \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$.

```
      n = ceil(1 / sqrt(epsilon)) ;
```

```
          I = I + 2 / (i ^ 3) ;
```

Commentaire

- On remarquera que la présence des « ; » n'est pas nécessaire ici. En effet, ce symbole annule l'affichage des résultats des instructions qui le précèdent. Or, dans une structure du type `function`, aucun résultat, hors la valeur finale de la variable de sortie (ici `I`) n'est visible à l'écran.
- On peut s'interroger sur la présence de la commande `disp(I, ' integrale = ')` dans cette fonction. En effet, cette commande permet l'affichage du résultat stocké dans la variable `I` (précédé du texte « `integrale =` »). Or l'affichage de cette valeur s'effectue automatiquement lors d'un appel à la fonction `approx`.
  On rappelle également que l'avantage de la structure `function` est que le calcul effectué par la fonction `approx` peut facilement être utilisé ailleurs (notamment dans une autre fonction) : il suffit pour ce faire d'écrire l'appel `approx(epsilon)` (avec `epsilon` choisi correctement). On ne souhaite donc pas, la plupart du temps, afficher le résultat d'une fonction, mais le stocker dans une nouvelle variable.
- Enfin, le choix du nom `I` pour la variable de sortie pouvait être un peu perturbant puisqu'il était ici question de coder la somme S_n, valeur approchée de l'intégrale I (et non I directement). Il aurait sans doute été plus judicieux, par exemple, de choisir la lettre `S`.

□