DM2

(Oraux HEC)

Exercice avec préparation 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. *a)* Question de cours
Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = \frac{2}{n^3}$.

Indication : on pourra introduire considérer le moment d'ordre 2 d'une v.a.r. X suivant une loi exponentielle de paramètre à préciser.

3. *a)* Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leqslant t$.

b) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ est convergente.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0$.

4. *a)* Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

5. *a)* Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Indication : on pourra songer à effectuer une comparaison série-intégrale (ou méthode des rectangles) avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\left| \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

c) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction `approx` affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, avec une précision `epsilon` entrée en argument.

```
1 function I = approx(epsilon)
2     I = 0;
3     n = ??? ;
4     for i = 1:n
5         I = I + ??? ;
6     end ;
7     disp(I, 'integrale = ') ;
8 endfunction
```