# DM1

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

***1. a)*** Dresser le tableau de variation de $f$, limites comprises.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (pour tout $x \in \, ]0, +\infty[$, $x \neq 0$).
- Soit $x \in \, ]0, +\infty[$.
$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x} \times x - \mathrm{e}^{-x} \times 1}{x^2} = -\frac{(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$$
Or $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $x^2 > 0$, et $x + 1 > 0$ (car $x > 0$). Ainsi :
$$\forall x \in \, ]0, +\infty[, \; f'(x) < 0$$
- On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ |
| Variations de $f$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ $0$ |

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - $\times$ Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = 1$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
  - $\times$ Tout d'abord, pour tout $x \in \, ]0, +\infty[$ : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^x}$.
  Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\square$

***b)*** Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n > 0 \end{array}\right.$

- ▶ **Initialisation** :
Tout d'abord $u_0 = 1$. Donc le terme $u_0$ est bien défini et : $u_0 > 0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} > 0 \end{array}\right.\right)$
Par hypothèse de récurrence, $u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.
  - La fonction $f$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $u_n \in \, ]0, +\infty[$.
  Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

- D'après le tableau de variations obtenu en question précédente :

$$\forall x \in \, ]0, +\infty[, \ \ f(x) > 0$$

Or $u_n > 0$, donc : $f(u_n) > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0.}$

**Commentaire**

Cette question est un classique de l'étude des suites récurrentes. Il faut savoir rédiger proprement la récurrence associée en commençant par bien énoncer l'hypothèse de récurrence. Il s'agit de démontrer :

« **la suite** $(u_n)$ est bien définie »

Pour ce faire, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

De plus, pour s'assurer de pouvoir effectivement calculer $f(u_n)$, il faut être sûr que $u_n$ soit dans l'ensemble de définition de $f$. Ici, il s'agit de vérifier qu'à tout rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On démontre en réalité une propriété plus forte, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n > 0 \end{array} \right.$$

Démontrer une propriété plus forte que celle assurant la bonne définition de la suite $(u_n)$ ne rend pas la démonstration plus difficile. Au contraire ! Tout se joue lors de l'étape d'hérédité : on aura plus de matériel mathématique si l'on suppose $u_n > 0$ que si l'on suppose $u_n \neq 0$ ce qui facilite la suite de la démonstration.

*2.* Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de $u_5$ et $u_6$ ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
  u = exp(-u)/u
  n = n + 1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100000
  u = exp(-u)/u
  n = n + 1
end
disp(n)
```

*Démonstration.*

- Expliquons le script de gauche. L'idée est la suivante :
  *1)* initialement, la variable **u** contient la valeur $u_0 = 1$.
  *2)* on teste alors si la valeur contenue dans **u** est strictement plus grande que $10^{-5}$.
  Tant que ce n'est pas le cas, on met à jour la variable **u** afin qu'elle contienne la valeur suivante de la suite $(u_n)$.
  Ce point est réalisé avec une boucle `while`.

En sortie de boucle, on est assuré que la variable `u` contient un élément de la suite $(u_n)$ plus petit que $10^{-5}$. L'indice de cet élément est repéré à l'aide d'un compteur `n`, initialement affecté à 0 et incrémenté de 1 à chaque tour de boucle.

D'après l'énoncé, le premier script renvoie la valeur 5,
donc $u_5$ est le premier terme de la suite $(u_n)$ vérifiant : $u_n \leqslant 10^{-5}$.

- On raisonne de même pour le script de droite.

D'après l'énoncé, le second script renvoie la valeur 6,
donc $u_6$ est le premier terme de la suite $(u_n)$ vérifiant : $u_n \geqslant 10^5$.

- On sait donc : $u_5 \leqslant 10^{-5}$ et $u_6 \geqslant 10^5$.

On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ diverge.

**Commentaire**

On pouvait essayer d'aller plus loin et conjecturer que :
× la sous-suite des termes d'indice impair $(u_{2n+1})$ converge vers 0,
× la sous-suite des termes d'indice pair $(u_{2n})$ diverge vers $+\infty$.
On dispose de très peu d'informations sur la suite $(u_n)$ à ce stade de l'exercice et ces programmes ne nous renseignent que sur deux valeurs successives. La question ne semble donc pas particulièrement pertinente.

□

*3. a)* Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$$

*Démonstration.*

- La fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2x$$

De plus : $-\mathrm{e}^{-x} < 0$ et $-2x \leqslant 0$. Donc : $g'(x) < 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $1$ ↘ | $-\infty$ |

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × Tout d'abord : $g'(0) = -\mathrm{e}^{-0} - 2 \times 0 = -1$.
  × Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = -\infty$.
  × Ensuite : $g(0) = \mathrm{e}^{-0} - 0 = 1$.
  × Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

□

***b)*** En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x$, possède une seule solution, que l'on notera $\alpha$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

*Démonstration.*

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$. On raisonne par équivalence.

$$f(x) = x \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{-x}}{x} = x \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = x^2 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; g(x) = 0$$

- La fonction $g$ est :
  × continue sur $]0, +\infty[$,
  × strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[)$ où :

$$g(]0, +\infty[) \;=\; \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to 0} g(x)\right[ \;=\; ]-\infty, 1[$$

  Or $0 \in \,]-\infty, 1[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Par équivalence, on en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } ]0, +\infty[.}$$

□

***c)*** Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $g\left(\dfrac{1}{e}\right) \;=\; e^{-\frac{1}{e}} - \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 \;=\; e^{-\frac{1}{e}} - e^{-2}$.
  De plus :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \;&\Leftrightarrow\; e^{-\frac{1}{e}} - e^{-2} > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-\frac{1}{e}} > e^{-2} \\ &\Leftrightarrow\; -\frac{1}{e} > -2 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } ]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{e} < 2 \;\Leftrightarrow\; e > \frac{1}{2} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } ]0,+\infty[) \end{aligned}$$

  Or la dernière inégalité est vraie car $e > 2$.

$$\boxed{\text{Donc, par équivalence : } g\left(\frac{1}{e}\right) > 0}$$

- Par ailleurs, par définition, le réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } g(\alpha) = 0.}$$

- Enfin : $g(1) = e^{-1} - 1$. De plus :

$$\begin{aligned} g(1) < 0 \;&\Leftrightarrow\; e^{-1} - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-1} < 1 \\ &\Leftrightarrow\; -1 < \ln(1) = 0 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } ]0,+\infty[) \end{aligned}$$

  La dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Donc, par équivalence : } g(1) > 0.}$$

- On en déduit : $g(1) < g(\alpha) < g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
  Or, d'après le théorème de la bijection, $g^{-1} : ]-\infty, 1[ \to ]0, +\infty[$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$.

$$\boxed{\text{En appliquant } g^{-1} \text{ à l'encadrement précédent, on obtient : } \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1.}$$

□

***4. a)*** Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $u_0 = 1$.
  Donc : $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1} = \mathrm{e}^{-1}$.
  D'où : $u_2 = f(u_1) = f(\mathrm{e}^{-1}) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-1}}$.
- Or :

$$\begin{array}{rcll} u_2 > u_0 & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-1}} > 1 & \\ & \Leftrightarrow & 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 > \mathrm{e}^{-1} \ \Leftrightarrow \ 0 > -1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } ]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

  La dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Donc, par équivalence : } u_2 > u_0.}$$

- Enfin, comme $u_2 > u_0$
  alors $u_3 = f(u_2) < f(u_0) = u_1$ *(par stricte décroissance de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$)*

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_3 < u_1.}$$

□

***b)*** En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

*Démonstration.*

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{2n} < u_{2(n+1)}$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question précédente : $u_0 < u_2$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{2(n+1)} < u_{2(n+2)}$).
    Par hypothèse de récurrence : $u_{2n} < u_{2(n+1)}$, c'est-à-dire $u_{2n} < u_{2n+2}$ $(*)$.
    Rappelons alors : $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+2} > 0$ (*cf* en question ***1.b)***).
    Ainsi, d'après $(*)$ et par stricte décroissance de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$ :

$$\begin{array}{ccc} f(u_{2n}) & > & f(u_{2n+2}) \\ \| & & \| \\ u_{2n+1} & & u_{2n+3} \end{array}$$

Toujours par stricte décroissance de $f$ sur $]0,+\infty[$ :

$$\begin{array}{ccccccc} & & f(u_{2n+1}) & < & f(u_{2n+3}) & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ u_{2(n+1)} & = & u_{2n+2} & & u_{2n+4} & = & u_{2(n+2)} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < u_{2(n+1)}$.

$\boxed{\text{Autrement dit, la suite } (u_{2n}) \text{ est strictement croissante.}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_{2n+2} < u_{2n}$ :

$$\begin{array}{ccc} f(u_{2n+2}) & > & f(u_{2n}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{2n+3} & > & u_{2n+1} \end{array}$$

*(par stricte décroissance de la fonction $f$ sur $]0,+\infty[$*

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_{2n+1}) \text{ est strictement décroissante.}}$

**Commentaire**

- Dans cette question, on commence par démontrer (par récurrence) que la suite $(u_{2n})$ est strictement croissante. On peut évidemment opérer de même pour la suite $(u_{2n+1})$. Cette méthode est plus longue mais elle est juste et permet donc d'obtenir tous les points alloués à cette question. Cependant, elle représente une perte de points à terme : le temps nécessaire à la rédaction de cette récurrence est du temps perdu sur une autre question.
- Il y a fort à parier qu'une rédaction du type « par une récurrence analogue » permettrait d'obtenir tous les points si la première récurrence a été faite correctement.

□

**5.** On pose : $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

***a)*** Déterminer $h(x)$ pour tout réel $x$ strictement positif et vérifier que $h$ est continue en 0.

*Démonstration.*

- Soit $x \in ]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)}{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x\,\frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)}{\exp(-x)} = x\,\exp\left(x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in ]0,+\infty[,\ h(x) = x\,\exp\left(x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)}$$

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = +\infty$.

  Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0} x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -\infty$.

  Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 \times 0 = 0 = h(0)$$

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } h \text{ est continue en 0.}}$

□

***b)*** Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue $x$ élément de $\mathbb{R}_+$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $h(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Le réel 0 est donc solution de l'équation } h(x) = x.}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} h(x) = x & \Leftrightarrow & x \exp\left(x - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = x & \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(x - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = 1 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0 & \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est bijective sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \ \Leftrightarrow\ x^2 = \mathrm{e}^{-x} & \\ & \Leftrightarrow & 0 = \mathrm{e}^{-x} - x^2 \ \Leftrightarrow\ g(x) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & x = \alpha & \textit{(d'après la question \textbf{3.b)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'équation } h(x) = x \text{ admet exactement deux solutions sur } [0, +\infty[ \text{ : 0 et } \alpha.}$$

**Commentaire**

On rappelle, qu'en question ***3.b)***, on a résolu l'équation $g(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$ (0 **exclus**).
Or on veut dans cette question ***5.b)*** résoudre l'équation $h(x) = x$ sur $[0, +\infty[$ (0 **inclus**).
Il faut donc tester si le réel 0 est solution de l'équation $h(x) = x$ à part.
On notera aussi que l'équivalence « $h(x) = x \ \Leftrightarrow\ g(x) = 0$ » est valide seulement si $x \neq 0$.

□

***c)*** En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

*Démonstration.*

- La suite $(u_{2n+1})$ est :
  - × décroissante, d'après la question ***4.b)***,
  - × minorée par 0, d'après la question ***1.b)*** ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$)

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2n+1}) \text{ converge donc vers un réel } \ell \text{ vérifiant } \ell \geqslant 0.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} u_{2(n+1)+1} & = & u_{2n+3} \ = \ f(u_{2n+2}) & \\ & = & f\big(f(u_{2n+1})\big) & \textit{(car } u_{2n+2} = f(u_{2n+1})\textit{)} \\ & = & (f \circ f)(u_{2n+1}) & \\ & = & h(u_{2n+1}) & \textit{(par définition de } h\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2(n+1)+1} \ = \ h(u_{2n+1})}$$

- La fonction $h$ est continue sur $[0, +\infty[$. En particulier, elle est continue au point $\ell$.
  Donc, par passage à la limite dans l'égalité précédente :
  $$\ell = h(\ell)$$
  Le réel $\ell$ est donc solution de l'équation $h(x) = x$ sur $[0, +\infty[$.
  D'après la question précédente, on en déduit : $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
- Comme la suite $(u_{2n+1})$ est décroissante, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{2n+1} \leqslant u_1$$
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient :
  $$\ell \leqslant u_1$$
  Or : $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (question ***4.a)***) et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha$ (question ***3.c)***). Ainsi :
  $$\ell \leqslant u_1 = \frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha$$
  Ainsi : $\ell < \alpha$ et donc : $\ell \neq \alpha$. On en déduit : $\ell = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2n+1}) \text{ converge vers } 0.}$$

**Commentaire**

- On pouvait aussi remarquer que, comme la suite $(u_{2n+1})$ est décroissante :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \; \ell \leqslant u_{2n+1}$$
  *(la limite de $(u_{2n+1})$ est sa borne inférieure et donc un minorant de $(u_{2n+1})$)*
  Ainsi, toujours par décroissance de la suite $(u_{2n+1})$ on obtient :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \; \ell \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1$$
  On conclut en remarquant : $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha$.
- La notion de borne inférieure est hors programme. Le résultat évoqué ci-dessus est donc à la limite du programme et on préférera donc la démonstration du corrigé.

□

***d)*** Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

*Démonstration.*

- D'après la question ***4.b)***, la suite $(u_{2n})$ est strictement croissante.
  Deux cas se présentent alors :
  × soit elle est majorée. Dans ce cas, la suite $(u_{2n})$ converge vers une limite $L$ vérifiant $L \geqslant 0$.
  × soit elle n'est pas majorée. Dans ce cas, la suite $(u_{2n})$ diverge vers $+\infty$.
  Démontrons qu'on est dans le second cas.
- Pour ce faire, on procède par l'absurde. On suppose alors que la suite $(u_{2n})$ est majorée.
  La suite $(u_{2n})$ est :
  × croissante d'après la question ***4.b)***,
  × majorée.
  Elle est donc convergente vers un réel $L$ vérifiant $L \geqslant 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{2(n+1)} \ = \ u_{2n+2} \ = \ f(u_{2n+1}) \ = \ f\big(f(u_{2n})\big) \ = \ h(u_{2n})$$
Par passage à la limite dans l'égalité précédente : $L = h(L)$.
Donc, d'après la question ***5.b)*** : $L = 0$ ou $L = \alpha$.
- Comme la suite $(u_{2n})$ est croissante, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \geqslant u_0$$
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient :
$$L \geqslant u_0 = 1$$
On en déduit : $L \neq 0$.
De plus, comme $\alpha < 1$ (question ***3.c)***) :
$$L \geqslant u_0 = 1 > \alpha$$
Ainsi : $L > \alpha$ et donc $L \neq \alpha$.
Ceci est absurde car $L = 0$ ou $L = \alpha$.

On en déduit que la suite $(u_{2n})$ n'est pas majorée.

**Commentaire**

- On pouvait aussi remarquer que, comme la suite $(u_{2n})$ est croissante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leqslant L$$
*(la limite de $(u_{2n})$ est sa borne supérieure et donc un majorant de $(u_{2n})$)*
Ainsi, toujours par croissance de la suite $(u_{2n})$ on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant L$$
On conclut en remarquant : $u_0 = 1 > \alpha$.
- La notion de borne supérieure est hors programme. Le résultat évoqué ci-dessus est donc à la limite du programme et on préférera donc la démonstration du corrigé.

- Finalement, la suite $(u_{2n})$ est :
  × croissante,
  × non majorée.

On en déduit que la suite $(u_{2n})$ diverge vers $+\infty$.

**Commentaire**

L'énoncé demande ici la nature d'une suite **croissante**. Il faut tout de suite penser au théorème de convergence monotone (*cf* début de démonstration).
Le réflexe, pour démontrer la divergence, est donc de raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée (et non qu'elle est convergente).

□

***e)*** Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)$ ?

*Démonstration.*
La suite $(u_n)$ admet une sous-suite divergente (la suite extraite $(u_{2n})$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge.}}$$

**Commentaire**

On utilise ici la proposition suivante :

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Plus précisément, on utilise sa forme contraposée :

Si une suite $(u_n)$ admet une suite extraite divergente, alors $(u_n)$ est divergente.

□